Maxwell 方程式

木下大輔
E-mail: daisuke@pub.mtk.nao.ac.jp

2000 年 *12* 月 *1* 日

1　Maxwell 方程式

$$\begin{aligned} div\vec{D} &= \rho & (1)\\ div\vec{B} &= 0 & (2)\\ rot\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (3)\\ rot\vec{H} &= \vec{i}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & (4) \end{aligned}$$

式 (1) は拡張されたガウスの法則、式 (2) は monopole が存在しないこと、式 (3) はアンペールの法則、式 (4) はファラデーの法則である。

2　電磁波

真空中では Maxwell の方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} div\vec{D} &= 0 & (5)\\ div\vec{B} &= 0 & (6)\\ rot\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (7)\\ rot\vec{H} &= \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & (8) \end{aligned}$$

また $\vec{D}$ と $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ と $\vec{H}$ の関係は

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon\vec{E} & (9)\\ \vec{B} &= \mu\vec{H} & (10) \end{aligned}$$

であり、真空中では

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0\vec{E} & (11)\\ \vec{B} &= \mu_0\vec{H} & (12) \end{aligned}$$

となる。式 (7) の rot をとると

$$rotrot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{B} \tag{13}$$

である。ここで

$$rotrot\vec{E} = graddiv\vec{E} - \nabla^2\vec{E} \tag{14}$$

であり、式 (5) を代入すると

$$rotrot\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} \tag{15}$$

より

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}rot\vec{B} \tag{16}$$

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{17}$$

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{18}$$

となる。つまり

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0 \tag{19}$$

が得られる。同様に、式 (8) の rot をとることにより

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{H} = 0 \tag{20}$$